〔論　文〕

不平等解析
―ローレンツ順序―*)

豊　田　　敬

0．はじめに

不平等の計測法に関して，その後に大きな影響を及ぼしたアトキンソンの論文，Atkinson (1970) が公表されて40年が経過した。1972年の講義録に基づくセンの著書，Sen (1973) は，当然のことながらアトキンソン論文の影響を受けているが，厚生経済学の観点から不平等問題を根本から論じたモノグラフで，格差や不平等そして貧困の問題への関心を喚起する契機となった文献である。同書刊行後四半世紀を経た1997年には，この間の展開を追加した拡大版が出版された。追加部分だけでも旧版とほぼ同じ頁数に達していて，そのことからも影響の大きさが窺われる。よく知られているように，センは1998年のノーベル経済科学賞を受賞している。

本稿では，不平等比較の際に最も基本となるローレンツ曲線による順序付け，つまりローレンツ順序について考察する。ローレンツ曲線の「ローレンツ」は Lorenz (1905) に因む。簡単で分かりやすいということから広く活用されてきた。日本でも原論文の10年後に河上肇が『貧乏物語』(『大阪朝日新聞』1916年9月18日）のなかで，「ロレンズ氏の曲線」としてローレンツ曲線を紹介している。小倉金之助 (1925) にも「ろーれんづ曲線」の記載がある。

ローレンツ曲線は，本来は統計グラフであって，パイにたとえて言えば，パイの分けられた結果としての各断片が平等（均等）分配からどの程度乖離しているかを図示するツールである。したがって，パイの大きさの問題は当初から捨象されている。また，パイを公正に分ける方法やその際に考慮されるべき貢献度，必要度，適合度といった側面も対象外となる。ただし，基準となる公平な分配が決まれば，その基準分配からの乖離を図示するツールにすることはできる。したがって，平等（均等）に胡散臭さを感じてそれを悪平等とする人がいて，しかもその人が自分にとっての公正な基準分配をはっきりと提示することができるならば，現状と基準との分配の乖離をローレンツ曲線によって図示できるのである。

サーベイ論文を二つ挙げておこう。Cowell (2000) は，20世紀における不平等計測法の展開をサーベイした文献としては最も包括的なものであり，末尾には470編の参考文献が挙げられている。最近の文献としては，Jenkins and Van Kerm (2009) がある。こちらは前者よりも応用面を意識している。もう一点，教科書風で読みやすい文献として，Lambert (2001) があることを付け加えておく。

1．用語と記号

所得や資産そして消費などに関する分配の格差・不平等の分析は，分布関数やその逆対応である分位点関数（quantile function）を用いて議論することもできるが，本稿ではより素朴で根元的でもある各個人の「所得」を並べたベクトル表示を基にする。なお，以下で扱う格差・不平等の分析は家計や個人の所得に限られるものでなく，家計や個人の資産や消費であってもよく，また企業の利潤であっても構わない。しかし，簡潔かつ一貫した表現にするために，以下では社会を構成する「個人」の「所得」という言い回しを用いる。

n 人からなる社会の各個人の所得を並べた

所得ベクトルを $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ とし，平均所得を $\bar{x}$ で表す。すなわち，

$$\bar{x}=\left(\sum x_i\right)/n,\quad n\bar{x}=\sum x_i$$

である。

各個人の所得を低い方から並べて昇順化した所得ベクトルを $(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)})$ と表記する。無論，$x_{(1)}\le x_{(2)}\le\cdots\le x_{(n)}$。ただし，等号（同順位）の場合の順番は任意とする。

逆に，高所得者から並べて降順化したベクトルを $(x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]})$ で表す。

$x_{[1]}\ge x_{[2]}\ge\cdots\ge x_{[n]}$ であって，$x_{(\bullet)}$ と $x_{[\bullet]}$ の間には，$x_{(i)}=x_{[n-i+1]}$，$i=1,2,\cdots,n$ が成り立ち，$x_i\ (i=1,\cdots,n)$ の順位（rank）を r_i とすれば，$x_i=x_{(r_i)}=x_{[n-r_i+1]}$ である。ただし，$(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ は $(1,2,\cdots,n)$ の順列で，等号（同順位）の場合は $x_i=x_{(r_i)}=x_{[n-r_i+1]}$ が成り立つように番号がついているものとする。

2．ローレンツ曲線

n 人からなる社会における個人 i の人口シェア（相対頻度）と所得シェアを，それぞれ p_i，q_i で表す。すなわち，$p_i=1/n$，$q_i=x_i/(n\bar{x})$。以下で所得シェアや相対所得を取り上げているときは，各個人の所得は非負で，少なくとも一人の所得は正とする。したがって，このとき，$x_i\ge 0$，$i=1,2,\cdots,n$，かつ $\bar{x}>0$ である。

各個人の所得を昇順化して累積和（累加）をとる操作によって，

累加人口シェア：

$$P_k=\sum_{i=1}^{k}p_{(i)}=\frac{k}{n},\quad k=0,1,\cdots,n$$

累加所得シェア：

$$Q_k=\sum_{i=1}^{k}q_{(i)}=\frac{1}{n\bar{x}}\sum_{i=1}^{k}x_{(i)},\quad k=0,1,\cdots,n$$

となる。ただし，$P_0=Q_0=0$ とする。明らかに $P_n=Q_n=1$ である。

ローレンツ曲線は「直交座標で，$(n+1)$ 個の点 $(P_0,Q_0),(P_1,Q_1),\cdots,(P_n,Q_n)$ をこの順に逐次，直線補完した折れ線」である。

自明なことではあるが，縦座標 Q_k は，昇順化した所得の累加シェアであるから，所得ベクトル $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の要素をどのように並べ替えてもローレンツ曲線は変わらない。つまり，$(1,2,\cdots,n)$ の任意の順列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ の所得ベクトル $(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})$ に対してローレンツ曲線は不変あるという事実を最初に確認しておく。これは，各個人が所得額のみで識別されることを意味し，いわゆる匿名性（anonymity）の性質である。各個人の一属性である所得を主体化し，個人を客体化する操作ということもできる。

さて，

点 $(P_0,Q_0)=(0,0)$，点 $(P_n,Q_n)=(1,1)$，であり，点 (P_{k-1},Q_{k-1}) と点 (P_k,Q_k) を結ぶ線分の傾きは，

$$\frac{q_{(k)}}{p_{(k)}}=\frac{x_{(k)}}{\bar{x}},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

そして，この線分の式は

$$Q=\frac{x_{(k)}}{\bar{x}}P+\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_{(i)}-x_{(k)})}{n\bar{x}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{k-1}x_{(i)}}{n\bar{x}}+\frac{x_{(k)}}{\bar{x}}\left(P-\frac{k-1}{n}\right),$$

$$P\in\left[(k-1)/n,k/n\right]$$

であるから，ローレンツ曲線は，点 $(0,0)$ と点 $(1,1)$ を結ぶ，単調増加で下に凸の折れ線で，平均所得 $\bar{x}$ 以下に対応する点ではその傾きは1以下，平均所得 $\bar{x}$ 以上に対応する点ではその傾きは1以上である。

特に，社会全員の所得が均等，すなわち，$x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときは，

$$P_k=Q_k=\frac{k}{n},\quad k=0,1,\cdots,n$$

であるから，点 $(0,0)$ と点 $(1,1)$ を結ぶ傾き1の線分になる。この 45° の線分は完全平等線あるいは完全均等線とよばれ，ローレンツ曲線における一つの基準線とされる。ローレンツ曲線によ

る不平等比較は，「所得ベクトルのローレンツ曲線が完全平等線からより遠ざかれば，その所得ベクトルの分配は，より不平等になる」という規準で判定される[1]。これを**ローレンツ規準**という。ローレンツ規準によって所得ベクトル間に順序関係が導入される。これが**ローレンツ順序**であるが，所得ベクトルすべてが順序付けできるわけではない。Lorenz（1905）でも既に指摘されているとおり，ローレンツ曲線が交差するケースはこの規準では順序付けができないからである[2]。つまり，ローレンツ順序は順序関係としては半順序である。

ローレンツ曲線は累加シェアの比較になっているから，測定単位には依存しない。つまり，二つの所得ベクトル x と $ax\ \ (a>0)$ のローレンツ曲線は同じであり，同一の不平等と判定される。

また，同一金額が社会全員に贈与される場合は平等化する。実際，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ と $x+b1=(x_1+b,x_2+b,\cdots,x_n+b)\ \ (b>0)$ とを比較すればよいので，$\overline{x+b1}=\bar{x}+b$ に留意して累加シェアの差をとると，

$$Q_k(x+b1)-Q_k(x)$$
$$=\frac{b}{n\bar{x}(\bar{x}+b)}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}-x_{(i)})$$

となり，$Q_k(x+b1)\geq Q_k(x)$が得られる[3]。

3．ローレンツ規準

まず，人数 n を固定した上で，上記のローレンツ規準について考察しよう。n 人の所得ベクトル x と y の累加所得シェアを，それぞれ $Q_k(x),\ Q_k(y)$ と表記する。ローレンツ曲線での不平等比較は次のようになる。

$Q_k(x)\leq Q_k(y),\ (k=1,2,\cdots,n)$ が成り立つとき，x は y 以上に不平等である，すなわち

$$\text{(L1)}\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{x_{(i)}}{n\bar{x}}\right)\leq\sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{y_{(i)}}{n\bar{y}}\right), \\ \qquad\qquad k=1,2,\cdots,n-1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_{(i)}}{n\bar{x}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_{(i)}}{n\bar{y}}\right)=1 \end{cases}$$

そして少なくとも一つの k で狭義の不等号が成り立つとき，x は y より不平等である，と判定される。これは，任意の分位点おいてそれ以下の階層の所得シェアがより少なければより不平等と判定することであって，我々の直感にも合う。ただし，ここではより不平等の方がより悪いといった価値判断は含めないことにする。

$$Q_k(x)=1-\sum_{i=k+1}^{n}\left(\frac{x_{(i)}}{n\bar{x}}\right)$$
$$=1-\sum_{i=1}^{n-k}\left(\frac{x_{[i]}}{n\bar{x}}\right),\ \ k=0,1,\cdots,n$$

であるから，(L1) は降順でみた場合

$$\text{(L}\hat{1}\text{)}\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{x_{[i]}}{n\bar{x}}\right)\geq\sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{y_{[i]}}{n\bar{y}}\right), \\ \qquad\qquad k=1,2,\cdots,n-1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_{[i]}}{n\bar{x}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_{[i]}}{n\bar{y}}\right)=1 \end{cases}$$

となる。これは，任意の分位点おいてそれ以上の階層の所得シェアがより多ければより不平等と判定することであって，実質的には上記の (L1) と同じであるが，上位階層のシェアに関心が向けられる場合には便利である。たとえば，上位20%の階層が総資産のうちの85%を占める，という表現はこの規準を特定の分位点に限定して使っていることになる。ローレンツ曲線自体，降順での累加シェアで描くこともできる。品質管理の分野におけるいわゆるパレート図は降順に累加している。市場占有率なども降順で扱っている。

ところで，規準 (L1) は両辺を n 倍して

$$\text{(L2)}\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{x_{(i)}}{\bar{x}}\right)\leq\sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{y_{(i)}}{\bar{y}}\right), \\ \qquad\qquad k=1,2,\cdots,n-1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_{(i)}}{\bar{x}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_{(i)}}{\bar{y}}\right)=n \end{cases}$$

としても同じであるから，所得シェアではなく，相対所得で考えても構わない。ローレンツ曲線の傾きが相対所得 $\dfrac{q_{(i)}}{p_{(i)}}=\dfrac{x_{(i)}}{\bar{x}},\ \ i=1,2,\cdots,n$ に等しいことを考えると，むしろ累加相対所得比較

の方が，基本的であるともいえる。さらに平均まわりの偏差をとって

$$
(\mathrm{L}3)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{x_{(i)}-\bar{x}}{\bar{x}}\right) \le \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{y_{(i)}-\bar{y}}{\bar{y}}\right), \\ \qquad\qquad k=1,2,\cdots,n-1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_{(i)}-\bar{x}}{\bar{x}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_{(i)}-\bar{y}}{\bar{y}}\right)=0 \end{cases}
$$

としても，実質は同じ条件となる。なお，この規準は，$\dfrac{x_{(i)}-\bar{x}}{\bar{x}}=\dfrac{x_{(i)}}{\bar{x}}-1$ であるから，相対所得 $(x_{(i)}/\bar{x})$ の平均（$\overline{(x/\bar{x})}=1$）まわりの偏差の累加比較とみてもよい。

以上の（L1）～（L3）はいずれも相対的な分配を念頭にしたものであるが，総和が一定という条件で考えると，単に平均まわりの偏差をとって，

$$
(\mathrm{L}4)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\left(x_{(i)}-\bar{x}\right) \le \sum_{i=1}^{k}\left(y_{(i)}-\bar{y}\right), \\ \qquad\qquad k=1,2,\cdots,n-1 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)}-\bar{x}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_{(i)}-\bar{y}\right)=0 \end{cases}
$$

とすることも考えられる。これは基準値の平均からの多寡という点で，絶対的な分配を考えている場合に該当する。

最後に，もし，所得ベクトル x と y の総所得が同じなら，累加所得そのものを比較するという規準

$$
(\mathrm{L}5)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \le \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}, \\ \qquad k=1,2,\cdots,n-1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)} \end{cases}
$$

は（L1）～（L4）と実質的には同じである。

以上の（L1）～（L5）はローレンツ曲線の図でいえば，縦軸のスケール（縮尺目盛）を調整することに対応する。たとえば，（L3）の場合，点 $(0,0)$ と点 $(1,0)$ を結ぶ谷型の折れ線となり，谷底は平均 $\bar{x}$ 近辺の分位点，そしてより不平等になると谷はより深くなる，といった具合である[4]。

4．マジョリゼーション

ローレンツ規準は Hardy，Littlewood，& Polya (1936) によるマジョリゼーション（majorization）の概念に相当する。これに関しては次の定理が基本的である。

定理 HLP (Hardy, Littlewood, & Polya)[5]

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ に対して，次の（M1），(M2)，(M3) は同値である：

$$
(\mathrm{M}1)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \le \sum_{i=1}^{k} y_{(i)}, \\ \qquad k=1,2,\cdots,n-1, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)} \end{cases}
$$

同じことであるが，降順で表現すれば

$$
(\mathrm{M}\hat{1})\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \ge \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \\ \qquad k=1,2,\cdots,n-1, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]} \end{cases}
$$

（M2）任意の凸関数 $u(\cdot)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} u(x_i) \ge \sum_{i=1}^{n} u(y_i),$$

（M3）n 次重確率行列 B が存在して，

$y=Bx$,

ここで，**重確率行列** $B=\left(b_{ij}\right)$ とは，行も列もすべて確率ベクトルとなっている正方行列のことをいう：

・$b_{ij}\ge 0,\ \ i,j=1,2,\cdots,n$,

・行和 $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}=1,\ \ i=1,2,\cdots,n$,

・列和 $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}=1,\ \ j=1,2,\cdots,n$。

（M1）ないし（M$\hat{1}$）が成り立つとき，x は y を majorize するという。これは，ローレンツ基準で x は y より不平等ということと同じである。

この定理の（M3）における重確率行列 B の行和＝1は，各 y_i が $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の加重平均

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

であること，そして，列和＝1はこれらの加重平均が全体として再分配となっていて総額が不変

$$\sum y_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\right)=\sum_j\left(\sum_i b_{ij}\right)x_j$$
$$=\sum x_j$$

であることを意味する。したがって, (M1), (M3)により，所得ベクトル x，y の所得総額が同じとき，ローレンツ基準で x の方が y より不平等ならば，より不平等な x に加重平均的再分配をすると，より平等な y が得られる，ということになって，ローレンツ順序の別の側面を示唆する意味合いをもつ。これについては次節の移転原理でも扱う。

さらに，たとえば, (L2) にこの定理を適用すると, (M1) $\Leftrightarrow$ (M2) により，

「$nQ_k(x) \le nQ_k(y),\ \ k = 1,2,\cdots,n$

$$\Updownarrow$$

$\sum_{i=1}^{n} u\left(\frac{x_i}{\bar{x}}\right) \ge \sum_{i=1}^{n} u\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right),\ \ u(\cdot):$凸」

となって，ローレンツ順序と一群の不平等尺度との関連が付けられるが，これは後の7節で触れる。

5．移転原理

高所得者からより低所得者への所得移転を考えよう。この移転によって分配は平等化するというのが**移転原理**（Pigou (1912), Dalton (1920)）である。所得移転は総所得額を変えないから，以下では，シェアや相対所得でなく，所得そのもので記述する。

$i < j$ として，相対的に高所得者 j の所得 $x_{(j)}$ からより低所得者 i の所得 $x_{(i)}$ へ，両者の差額 $(x_{(j)} - x_{(i)})$ 以下の額 δ の移転がなされるとする。このときの所得移転額は，$0 \le \delta \le (x_{(j)} - x_{(i)})$ であるから，$\delta = \lambda(x_{(j)} - x_{(i)}),\ 0 \le \lambda \le 1$ と表すことができて

$$\left\{\begin{aligned} x_{(i)} &\to x_{(i)} + \lambda(x_{(j)} - x_{(i)}) \\ &\qquad = (1-\lambda)x_{(i)} + \lambda x_{(j)} \\ x_{(j)} &\to x_{(j)} - \lambda(x_{(j)} - x_{(i)}) \\ &\qquad = \lambda x_{(i)} - (1-\lambda)x_{(j)} \end{aligned}\right.$$

（ $i < j,\ 0 \le \lambda \le 1$ ）。

この変換は，n 次単位行列 I と i, j 要素を入れ換える置換行列 P を用いて

$$\left[(1-\lambda)I + \lambda P\right]x = (1-\lambda)x + \lambda Px$$

と表現できる。このときの n 次行列 $\left[(1-\lambda)I + \lambda P\right]$ は重確率行列である。一般に重確率行列の積はまた重確率行列であるから, (M1) $\Leftrightarrow$ (M3) は，ある所得ベクトル x における相対的な高所得者から低所得者への所得移転を有限回繰り返すことによって，ローレンツ順序の意味でより平等な任意の所得ベクトル y に変換できるということを意味する。

6．人口原理

次に人数 n が異なる場合のローレンツ規準について考察しよう。

$(n+1)$ 個の点 $(P_0, Q_0), (P_1, Q_1), \cdots, (P_n, Q_n)$ をこの順で逐次に直線補完，という操作は，所得ベクトル $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のローレンツ曲線と，この x を m 個並べた mn 人からなる所得ベクトル $x' = (\underbrace{x, x, \cdots, x}_{m個})$ のローレンツ曲線を同一と見做す，ということに対応する。実際，このとき $\bar{x}' = \bar{x}$ であり，$x' = (\underbrace{x, x, \cdots, x}_{m個})$ を昇順化すると

$$x_{(k)} = x'_{((k-1)m+1)} = x'_{((k-1)m+2)} = \cdots = x'_{(km)},$$
$$k = 1,2,\cdots,n$$

であって，$k = 1,2,\cdots,n$ に対して

$$\begin{aligned} Q_{(k-1)m+j} &= \frac{\sum_{i=1}^{(k-1)m+j} x'_{(i)}}{nm\bar{x}'} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{(k-1)m} x'_{(i)} + \sum_{i=(k-1)m+1}^{(k-1)m+j} x'_{(i)}}{nm\bar{x}'} \\ &= \frac{m\sum_{i=1}^{k-1} x_{(i)}}{nm\bar{x}} + \frac{jx_{(k)}}{nm\bar{x}} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{x_{(i)}}{\bar{x}}\right) \times \frac{1}{n} + \frac{x_{(k)}}{\bar{x}} \times \frac{j}{nm} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_{(i)}}{n\bar{x}} + \frac{x_{(k)}}{\bar{x}}\left(P_{(k-1)m+j} - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$j = 1,2,\cdots,m$$

が導かれて，点 $(P_{(k-1)m+j}, Q_{(k-1)m+j})$ は線分（1）式の上の点であることが分かる。

所得ベクトル x とそれを複製して $(m-1)$ 個付け加えた所得ベクトル $x' = (\underbrace{x, x, \cdots, x}_{m個})$ とを同一視することを**人口原理**（Dalton（1920））という。

人口原理に従えば，一般に n 人の所得ベクトル $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と m 人の所得ベクトル $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ を比較する場合は，n 人の所得ベクトル x と複製した mn 人の所得ベクトル $x' = (\underbrace{x, x, \cdots, x}_{m個})$ と，m 人の所得ベクトル y と同一の $y' = (\underbrace{y, y, \cdots, y}_{n個})$ とで比較すればよいということになる。すなわち，

$$Q_k(x') \le Q_k(y'),\ \ k = 1,2,\cdots,mn$$

であるが，x' の総所得と平均所得はそれぞれ $m(n\bar{x})$，$\bar{x}$，そして y' のそれはそれぞれ $n(m\bar{y})$，$\bar{y}$ であるから，たとえば（L1）は

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{x'_{(i)}}{mn\bar{x}}\right) \le \sum_{i=1}^{mn}\left(\dfrac{y'_{(i)}}{nm\bar{y}}\right), \\ \qquad\qquad k = 1,2,\cdots,mn-1 \\ \sum_{i=1}^{mn}\left(\dfrac{x'_{(i)}}{mn\bar{x}}\right) = \sum_{i=1}^{mn}\left(\dfrac{y'_{(i)}}{nm\bar{y}}\right) = 1 \end{cases}$$

また，(L2) は

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{x'_{(i)}}{\bar{x}}\right) \le \sum_{i=1}^{k}\left(\dfrac{y'_{(i)}}{\bar{y}}\right), \\ \qquad\qquad k = 1,2,\cdots,mn-1 \\ \sum_{i=1}^{mn}\left(\dfrac{x'_{(i)}}{\bar{x}}\right) = \sum_{i=1}^{mn}\left(\dfrac{y'_{(i)}}{\bar{y}}\right) = mn \end{cases}$$

そして少なくとも一つの k で狭義の不等号が成り立つとき，x は y より不平等である，と判定されることになる。

ここで，

$$k = (k_x - 1)m + j_x = (k_y - 1)n + j_y,$$
$$k = 1,2,\cdots,mn;\ \ 1 \le j_x \le m,\ \ 1 \le j_y \le n$$

とすれば，

$$Q_k(x') = \sum_{i=1}^{k_x-1}\left(\frac{x_{(i)}}{\bar{x}}\right)\times\frac{1}{n} + \frac{x_{(k_x)}}{\bar{x}}\times\frac{j_x}{nm},$$
$$j_x = 1,2,\cdots,m$$

$$Q_k(y') = \sum_{i=1}^{k_y-1}\left(\frac{y_{(i)}}{\bar{y}}\right)\times\frac{1}{m} + \frac{y_{(k_y)}}{\bar{y}}\times\frac{j_y}{mn},$$
$$j_y = 1,2,\cdots,n$$

であるから，$x' = (\underbrace{x, x, \cdots, x}_{m個})$ の方は

$$\begin{cases} nmQ_k(x') = \sum_{i=1}^{k_x-1} m\times\left(\dfrac{x_{(i)}}{\bar{x}}\right) + j_x\times\left(\dfrac{x_{(k_x)}}{\bar{x}}\right) \\ \qquad\qquad k = 1,2,\cdots,nm-1 \\ nmQ_{nm}(x') = \sum_{i=1}^{n} m\times\left(\dfrac{x_{(i)}}{\bar{x}}\right) = nm \end{cases},$$

また，$y' = (\underbrace{y, y, \cdots, y}_{n個})$ の方は

$$\begin{cases} mnQ_k(y') = \sum_{i=1}^{k_y-1} n\times\left(\dfrac{y_{(i)}}{\bar{y}}\right) + j_y\times\left(\dfrac{y_{(k_y)}}{\bar{y}}\right) \\ \qquad\qquad k = 1,2,\cdots,nm-1 \\ mnQ_{mn}(y') = \sum_{i=1}^{m} n\times\left(\dfrac{y_{(i)}}{\bar{y}}\right) = mn \end{cases}$$

となる。

これに定理（HLP）を適用すると，(M1) $\Leftrightarrow$ (M2) より，

「$nmQ_k(x') \le mnQ_k(y'),\ \ k = 1,2,\cdots,nm$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} m\times u\left(\frac{x_i}{\bar{x}}\right) \ge \sum_{i=1}^{m} n\times u\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right),\ \ u(\cdot):凸$$

すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n} u\left(\frac{x_i}{\bar{x}}\right)\times\frac{1}{n} \ge \sum_{i=1}^{m} u\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)\times\frac{1}{m}、\ u(\cdot):凸」$$

が得られる。

7．不平等尺度

最後に不平等尺度との関わりについて簡単に述べる。ただし，ここではAtkinson (1970) 流の規範的な不平等尺度は取り上げない。

所得ベクトル $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して，その分布関数（累加人口シェア）は

$$F_n(x)\equiv\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{(0,x]}(x_i)$$

ただし，$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$

で定義される。$F_n(x)$ の逆を

$$F_n^{-1}(p)=\inf\{x:F_n(x)\geq p\},\ \ 0\leq p\leq 1$$

で定める。これを分位点関数（quantile function）という[6)]。$F_n^{-1}(p)$ を導入すると，ローレンツ曲線は

$$Q(p)=\frac{1}{\bar{x}}\int_0^p F_n^{-1}(t)dt,\ \ 0\leq p\leq 1$$

のグラフである。

ジニ係数 G は相対平均差として定義されるが，ローレンツ曲線と完全平等線（45°の線分）とに囲まれる弓形の面積の2倍に等しい。ジニ係数が頻繁に用いられる所以である。すなわち，

$$\begin{aligned}G&=\frac{1}{2\bar{x}}\iint|x-\xi|dF_n(x)dF_n(\xi)\\&=1-2\int_0^1 Q(p)dp\\&=\frac{2}{\bar{x}}Cov\left(x,F_n(x)\right)\end{aligned}$$

最後の辺はジニ係数の共分散表現である[7)]。

また，前節の最後に示したことにより，(M2) は凸関数 $u(\cdot)$ の期待値として

$$\sum_{i=1}^{n}u\left(\frac{x_i}{\bar{x}}\right)\times\frac{1}{n}=\int u\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)dF_n(x)$$

と表され，期待値型の不平等尺度を導く。

特に，グループ内不平等の加重和とグループ間不平等との和に分解できるという分解可能性の条件を課すと，凸関数 $u(\cdot)$ が限定されて，次の不平等尺度が導かれる：

$$GE_\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha(\alpha-1)}\displaystyle\int((x/\bar{x})-1)^\alpha dF_n(x), & \alpha\neq 0,1\\ \displaystyle\int(x/\bar{x})\ln(x/\bar{x})dF_n(x), & \alpha=1\\ -\displaystyle\int\ln(x/\bar{x})dF_n(x), & \alpha=0\end{cases}。$$

この尺度は一般化エントロピークラス（Generalized Entropy Class）と呼ばれ，

$\alpha=2$ のときは，平方変動係数（変動係数 CV の2乗）の半分：

$2GE_2=CV^2$，

$\alpha=1$ のときはTheil (1967) のエントロピー尺度[8)]，

$\alpha=0$ のときは，算術平均と幾何平均の比の対数：

$GE_0=\ln\left(\bar{x}/\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)$，

となる。

〔注〕

*) 本稿の内容は，著者が2009年度本学国内研究員として行なった研究の一部を含む。また，本学経営学会研究会（2010年7月27日）において「ジニ係数をめぐって（A SURVEY)」と題して報告した内容とも重複する部分がある。そもそもは Berge (1963) を閲読する機会を得た福島大学経済学部在職時代に由来する。同大学森合キャンパスの想い出のよすがにしたいという気持もある。Berge (1963) は，1997年にペーパーバック版が Dover 社から出版された。最近も増刷されている。

1) p_i を個人 i に配分されるべき所得シェア，そして q_i を個人 i の現実の所得シェアとすれば，$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ が基準分配となる。このとき，基準分配との比率 $\left(q_i/p_i\right)$ が昇順になるように並べて，横軸に基準分配の累加所得シェア，縦軸に現実の累加所得シェアをとれば，基準分配からの乖離を表現するローレンツ曲線となる。つまり，個人個 i，$(i=1,2,\cdots,n)$ の現実の所得シェア q_i は，彼の基準分配シェア p_i を単位にして測り直すと個人識別の要らない量となり，昇順化することができるということである。

2) 北條（2008）は，比較に際してローレンツ曲線の交差が頻繁に発生する事例を扱った実証研究である。豊田・和合（1978）はローレンツ曲線の交差の問題を扱っていて，『貯蓄動向調査』の事例と Atkinson (1970) の掲載事例とを取り上げている。

なお，多数のローレンツ曲線についてそれらの交差の有無をチェックするのは煩雑なため，Atkinson (1970) 以降でも実証研究の多くはせいぜい2，3の不平等尺度での計測による比較で済ますというのが実情である。

3) 贈与でなく収奪の場合は不平等化する。条件より，$-x_{(1)} \leq b \leq 0$ であるから，

$$Q_k(x+b1) \leq Q_k(x)$$

となる。

4) 田口（1984），豊田（1994）はローレンツ曲線の拡張とその活用について論じている。なお，ローレンツ曲線を連結ベクトルグラフの特殊ケースとして捉えることもできるが，これは枠組みを広げ過ぎのように思われる。

5) 定理の証明は Berge（1997）が手っ取り早い。元々は Hardy，Littlewood，& Polya（1929）であり，マジョリゼーションという用語は Hardy，Littlewood，& Polya（1934）で使われている。この第2版には翻訳がある。付け加えると，Sen（1973）とその拡大版にも翻訳がある。後述の Dalton（1920）も翻訳があるようである。マジョリゼーションに関わる事柄全般については Marshall & Olkin（1979）が包括的である。

6) 森口（1995）は分位点関数のことを確率表現関数と呼んで，いろいろな応用について記述している。

7) 最初に指摘したのは Stuart（1954）と思われる。ジニ係数 G と変動係数 CV は，次の公式で関係付けられる（豊田（2005））。

$$G = \sqrt{\frac{n^2-1}{3n^2}} \times \rho(x, F_n(x)) \times CV$$

ただし，$\rho(x, F_n(x))$ は x と $F_n(x)$ との相関係数。

この公式は，宿久・村上・原（2009）にも載っている。

8) Theil の不平等尺度は Kullback-Leibler 情報量に他ならない。情報量と不平等尺度との関係については豊田（1996）で扱っている。分解可能性と一般化エントロピークラスについては Cowell（2000）を参照されたい。

〔参考文献〕

Atkinson（1970）On the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory*. 2.

Berge (1963) *Topological Spaces*, Oliver & Boyd.

Cowell (2000) Measurement of inequality, (in Atkinson & Bouruignon eds. *Handbook of Income Distribution,* Vol.1, North-Holland.).

Dalton (1920) Measurement of the inequality of incomes, *The Economic Journal* 30.

Hardy, Littlewood, & Polya (1929) Some simple inequalities satisfied by convex functions, Messenger Mathematics, 58.

Hardy, Littlewood, & Polya (1934) *Inequalities*, Cambridge U.P..

Jenkins & Van Kerm (2009) The measurement of economic inequality (in Salverda, Nolan, and Smeeding eds. *The Oxford Handbook of Economic Inequality*, Oxford U.P.).

Lambert (2001) *The Distribution and Redistribution of Income* 3rd ed., Manchester U.P..

Lorenz (1905) Methods of measuring the concentration of wealth, *Publications of the American Statistical Association*, No.70.

Marshall & Olkin (1979) *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press.

Pigou (1912) *Wealth and Welfare*, Macmillan.

Sen (1973) *On Economic Inequality,* Oxford U.P..

Stuart (1954) The correlation between variate-values and ranks in samples from a continuous distribution, *The British Journal of Statistical Psychology*, 7.

Theil (1967) *Economics and Information Theory*, North Holland.

小倉金之助（1925）『統計的研究法』積善館。

田口時夫（1984）『経済分析と多次元解析』東洋経済新報社。

豊田敬（1994）「集中曲線と弾力性計測法」『経済研究』第45巻。

豊田敬（1996）「情報量と不平等尺度」『経営志林』第32巻。

豊田敬（2005）「不平等解析 ― ジニ係数と変動係数 ―」『経営志林』第41巻。

豊田敬・和合肇（1978）「所得不平等の計測 ― ローレンツ曲線の交叉に関して ―」『経済研究』第29巻。

北條雅一（2008）「日本の教育の不平等 ― 教育ジニ係数による計測」『日本経済研究』No.59。

森口繁一（1995）『確率表現関数』東京大学出版会。

宿久洋・村上享・原恭彦（2009）『確率と統計の基礎Ⅰ』ミネルヴァ書房。